离散数学

第三章: 集合

卢杨
厦门大学信息学院计算机科学与技术系
luyang@xmu.edu.cn

厦門大學信息学院（特色化示范性软件学院）
School of Informatics Xiamen University (National Characteristic Demonstration Software School)
厦门大学 计算机科学与技术系
Department of Computer Science and Technology, Xiamen University

3.1 集合的基本概念

集合的基本概念

- 集合是不能精确定义的基本概念. 集合的直观含义: 具有共同性质的, 作为整体识别的, 确定的, 互相区别的一些事物的聚集.
- 这只是集合一种描述, 不是定义, 因为“聚集”是集合一词的同义反复.
- 构成一个集合的每个事物, 称为这个集合中的元素或成员.
  - 集合由它的元素所决定.

例　26个英文字母的集合,

全体中国人的集合,

坐标平面上所有点的集合.

集合的基本概念

- 集合一般用大写英文字母表示, 集合中的元素用小写英文字母表示.
- 但这不是绝对的, 因为集合的元素可以是任何类型的事物, 一个集合可以作为另一个集合的元素.

例 自然数集合**N**, 整数集合**Z**, 有理数集合**Q**, 实数集合**R**, 复数集合**C**等等.

- 元素与集合之间的关系是属于或者不属于, 两者必成立其一且仅成立其一.
- 如果x是集合S的一个元素, 记作$x \in S$, 读作x属于S; y不是集合S的元素, 记作$y \notin S$, 读作y不属于S.

例 $0 \in \mathbf{N}$, $0 \in \mathbf{Z}$, $-1 \in \mathbf{Z}$, 但$-1 \notin \mathbf{N}$等.

集合的基本概念

- 集合，元素和属于是集合论的三个最基本原始概念.
  - 正像几何学中的点，线，面等概念一样，集合，元素和属于也是一种未加形式定义而可直接引入的最基本原始概念，仅如上作了直观的描述.
  - 集合论中的其它概念，均可由集合，元素和属于这三个概念出发，给予严格定义.
- 随着计算机时代的开始，集合的元素已由数学的“数集”和“点集”拓展成包含文字，符号，图形，图象，声音和视频等多媒体的信息，构成了各种数据类型的集合.

集合的表示方法

- 表示一个集合的方法有两种:
  - 列元素法 $A = \{\ldots\}$: 列出集合的所有元素，元素之间用逗号隔开，并用花括号括起来.

  例 26个英文字母的集合: $A = \{a, b, c, d, \ldots, z\}$.

  - 谓词表示法 $B = \{x|F(x)\}$: 用谓词来概括集合中元素的属性.

  例 $B = \{x|x \in R \wedge x^2 - 1 = 0\}$表示方程 $x^2 - 1 = 0$的实数解.

- 许多集合可以同时用这两种方法来表示，例如B也可以写作$\{-1,1\}$. 但有些集合就只能用一种方法表示，如实数集合就不能用列元素法表示，因为实数是不可列的.

集合的性质

- 集合的元素是彼此不同的，如果同一个元素在集合中多次出现，应该认为是一个元素.

例 $\{1,1,2,3\} = \{1,2,3\}$.

- 集合的元素是无序的.

例 $\{1,2,3\} = \{3,1,2\}$.

- 集合的元素可以是任何类型的事物, 也可以是集合.

例 $A = \left\{a, \{b, c\}, d, \left\{\{d\}\right\}\right\}$. 需要注意, 这里只有$a \in A$, $\{b, c\} \in A$, $d \in A$, $\left\{\{d\}\right\} \in A$, 然而$b \notin A$, $c \notin A$, $\{d\} \notin A$.

定义

设A是一个集合. 若A的元素都是集合, 则称A为集合族.

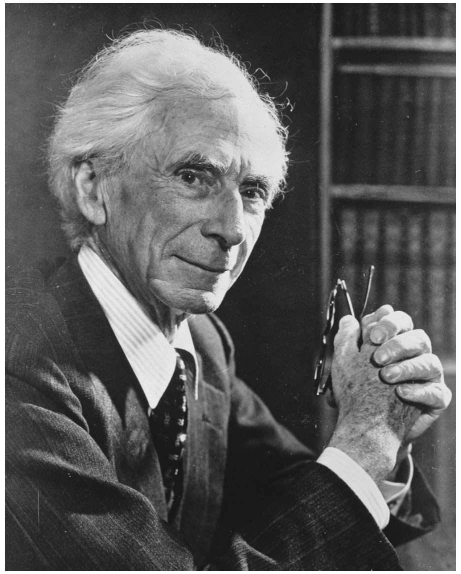
集合的性质

- 英国哲学家罗素把集合分成两类:
  - 集合A本身是A的一个元素, 即$A \in A$;
  - 集合A本身不是A的一个元素, 即$A \notin A$.
- 罗素悖论的构造:

  令$A = \{x|x \notin x\}$, 那个A本身到底是不是A的一个元素呢, 即$A \in A$还是$A \notin A$？

  若$A \in A$, 则集合A中元素都有$A \notin A$;

  若$A \notin A$, 满足$A \notin A$的对象应属于集合A, 则有$A \in A$.
- 理发师悖论是其通俗版本: “一个理发师只给且必须给村子里不给自己理发的人理发”.



伯特兰 · 罗素
(1872-1970)
英国哲学家、数学家和逻辑学家
代表作: 《西方哲学史》

图片来源: https://zh.wikipedia.org/wiki/%E4%BC%AF%E7%89%B9%E5%85%B0%C2%B7%E7%BD%97%E7%B4%A0

集合的性质

- 为了避免这种悖论，我们引入正则公理，并且规定集合不能是自己的成员.
- 集合的元素可以是任何具体或抽象事物，包括别的集合，唯独不能是本集合自身.
- 因为一个集合是由它的元素构成的，是先有元素后，才形成集合的，所以一个正在形成中的集合便不能作为一个实体充当自己的元素. 否则在概念上将产生循环，从而导致悖论.
- 正则公理消除了悖论. 悖论不在本课程讨论范围.

集合间的关系

定义 3.1

设A, B为集合, 若B中的每个元素都是A的元素, 则称B是A的子集, A是B的超集, 也称A包含B或B包含于A, 记作$B \subseteq A$ (或$A \supseteq B$). 若B不是A的子集, 则记作$B \nsubseteq A$.

例$\mathbf{N} \subseteq \mathbf{Z} \subseteq \mathbf{Q} \subseteq \mathbf{R} \subseteq \mathbf{C}$, 但$\mathbf{Z} \nsubseteq \mathbf{N}$.

- 包含的符号化表示为:

$$B \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in B \to x \in A)$$

- 不包含的符号化表示为:

$$B \nsubseteq A \Leftrightarrow \exists x(x \in B \land x \notin A)$$

- 显然对于任何集合S都有$S \subseteq S$.

集合间的关系

定义 3.2

设A, B为集合, 若$A \subseteq B$且$B \subseteq A$, 则称A与B**相等**, 记作$A = B$. 如果A与B不相等, 则记作$A \neq B$.

- 集合相等使用符号化表示为:

$$A = B \Leftrightarrow B \subseteq A \land A \subseteq B \Leftrightarrow \forall x(x \in A \leftrightarrow x \in B)$$

- 两集合相等是通过集合中的元素来定义的，即如果要证明A，B两集合相等，必须首先知道集合A和B中含有哪些元素，而这往往是难以满足的.
- 在通常情况下, 是通过证明两集合相互包含来证明它们相等.

集合间的关系

定义 3.3

若B为A的子集，且$A \neq B$，则称B是A的真子集，或称A真包含B，记作$B \subset A$，若B不是A的真子集，则记作$B \not\subset A$.

例 $\mathbf{N} \subset \mathbf{Z} \subset \mathbf{Q} \subset \mathbf{R} \subset \mathbf{C}$，但$\mathbf{N} \not\subset \mathbf{N}$.

- 真子集的符号化表示为

$$B \subset A \Leftrightarrow B \subseteq A \wedge B \neq A$$

- 不是真子集的符号化表示为

$$B \not\subset A \Leftrightarrow \exists x\,(x \in B \wedge x \notin A) \vee (B = A)$$

空集

定义 3.4

不含任何元素的集合称为空集, 记作$\emptyset$或$\{\ \}$.

- 空集可以符号化表示为

$$\emptyset = \{x | x \neq x\}$$

或者

$$\emptyset = \{x | P(x) \land \neg P(x)\}$$

其中$P(x)$为任意谓词.

例 $\{x | x \in R \land x^2 + 1 = 0\}$是方程$x^2 + 1 = 0$的实数解集，因为该方程无实数解, 所以是空集.

空集

定理 3.1 空集是一切集合的子集.

证明

给定任意集合A, 由子集定义 (令$B = \emptyset$) 有

$$\emptyset \subseteq A \Leftrightarrow \forall x(x \in \emptyset \to x \in A)$$

右边的蕴涵式因前件假而为真命题，所以左边$\emptyset \subseteq A$也为是真命题.

空集

推论 空集是唯一的.

证明

若存在空集合$\emptyset_1$和$\emptyset_2$, 由定理3.1知

$$\emptyset_1 \subseteq \emptyset_2 \text{ 和 } \emptyset_2 \subseteq \emptyset_1$$

根据集合相等的定义$\emptyset_1 = \emptyset_2$.

- 任意非空集合S, 至少有两个不同的子集, 即$\emptyset \subseteq S$和$S \subseteq S$. 称$\emptyset$和S自身是S的平凡子集.

空集

例 列出$B = \{\emptyset\}$和$C = \emptyset$的全部 (真) 子集.

解 $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$且$\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$;

B有两个子集: $\emptyset$和$\{\emptyset\}$；B只有一个真子集: $\emptyset$.

C只有一个子集$\emptyset$, 没有真子集.

例 判断下列命题的真假:

(1) $\emptyset \in \emptyset$　　(2) $\emptyset \in \{\emptyset\}$　　(3) $\{\emptyset\} \in \{\emptyset\}$

(4) $\emptyset \in \{\{\emptyset\}\}$　　(5) $\{\emptyset\} \in \{\{\emptyset\}\}$　　(6) $\emptyset \subseteq \emptyset$

(7) $\emptyset \subseteq \{\emptyset\}$　　(8) $\{\emptyset\} \subseteq \{\emptyset\}$　　(9) $\{\emptyset\} \subseteq \{\{\emptyset\}\}$

解 (2), (5), (6), (7), (8)为真；其余均为假.

幂集

- 含有n个元素的集合简称n元集，它的含有$m(m \le n)$个元素的子集叫做它的m元子集．任给一个n元集, 怎样求出它的全部子集呢?

例3.1 $A = \{0,1,2\}$, 将A的子集分类:

- 0元子集, 也就是空集, 只有一个: $\emptyset$.
- 1元子集, 又称单元集, 有n个: $\{0\}, \{1\}, \{2\}$.
- 2元子集: $\{0, 1\}, \{0, 2\}, \{1, 2\}$.
- 3元子集, 也就是自身, 只有一个: $\{0,1,2\}$.

对于n元集A, 它的0元子集有C_n^0个, 1元子集有C_n^1, ..., m元子集有C_n^m个, ..., n元子集有C_n^n个. 子集总数为

$$C_n^0 + C_n^1 + \cdots + C_n^n = 2^n \text{个}$$

幂集

定义

集合中元素的个数称为基数或势，用$|A|$表示．基数是有限数的集合称为有限集, 否则称为无限集.

定义 3.5

设A为集合, 把A的全体子集构成的集合叫做A的幂集, 记作$P(A)$或者2^A. 符号化表示为:

$$P(A) = \{x|x \subseteq A\}$$

- 在上例中, 集合A的幂集为

$$P(A) = \{\emptyset, \{0\}, \{1\}, \{2\}, \{0,1\}, \{0,2\}, \{1,2\}, A\}.$$

- 不难看出, 若A是n元集, 则$P(A)$有2^n个元素, 即$|P(A)| = 2^n$.

全集

定义 3.6

在一个具体问题中，如果所涉及的集合都是某个集合的子集，则称这个集合为全集，记作E.

- 全集的符号化表示为

$$E = \{x \mid P(x) \vee \neg P(x)\}$$

其中$P(x)$为任意谓词.

全集

- 全集的概念具有相对性，全集只包含与讨论有关的所有对象，并不一定包含一切事物. 与个体域的概念类似.
- 不同的问题有不同的全集，即使是同一个问题也可以有不同的全集. 全集并非绝对唯一的, 而是相对唯一的.
- 一般地，全集取得小一些，问题的描述和处理会简单些. 全集E在问题讨论之初便应选定.
- 任意集合A, 有$\emptyset \subseteq A \subseteq E$.

课堂练习

求$A = \left\{\emptyset, \{\emptyset\}, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}\right\}$的幂集.

课堂练习

求$A=\left\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\right\}$的幂集.

解

$$P(A)=\left\{\begin{array}{c}\emptyset,\\ \{\emptyset\},\{\{\emptyset\}\},\left\{\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\right\},\\ \{\emptyset,\{\emptyset\}\},\left\{\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\right\},\left\{\emptyset,\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\right\},\\ \left\{\emptyset,\{\emptyset\},\{\emptyset,\{\emptyset\}\}\right\}\end{array}\right\}\begin{array}{l}\text{空集}\\ \text{1元子集}\\ \text{2元子集}\\ \text{自身}\end{array}$$

- 技巧：将子集按基数由小到大地分类，相同基数类的子集再按元素顺序逐个写出.

3.2 集合的基本运算

集合的基本运算

定义 3.7

设A, B为集合, A与B的并集$A \cup B$, 交集$A \cap B$, B对A的差集 (又称相对补集) 或$A - B$分别定义如下:

$$A \cup B = \{x | x \in A \vee x \in B\},$$
$$A \cap B = \{x | x \in A \wedge x \in B\},$$
$$A - B = \{x | x \in A \wedge x \notin B\}.$$

这三种运算可读作A并B, A交B, 和A减B.

- 由定义可以看出$A \cup B$由A或B中的元素构成, $A \cap B$由A和B中的公共元素构成, $A - B$由属于A但不属于B的元素构成.

集合的基本运算

例 $A=\{a,b,c\}$，$B=\{a\}$，$C=\{b,d\}$，则有$A\cup B=\{a,b,c\}$，$A\cap B=\{a\}, A-B=\{b,c\}, B-A=\emptyset, B\cap C=\emptyset.$

- 如果两个集合的交集为$\emptyset$，则称这两个集合是不交的．例如，上例中的B与C是不交的.
- 产生某集的运算通常称为某运算，例如$\cup$称为并运算，$\cap$称为交运算，$-$称为差运算或相对补运算.
- $\in$和$\subseteq$不是运算，是谓词，得到的是真值．集合运算是函数，得到的还是集合.

集合的基本运算

- 两个集合的并和交运算可以推广成n个集合的并和交:

$$\bigcup_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n$$
$$= \{x | x \in A_1 \vee x \in A_2 \vee \cdots \vee x \in A_n\}$$
$$= \{x | \exists i (1 \le i \le n \wedge x \in A_i)\},$$
$$\bigcap_{i=1}^{n} A_i = A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n$$
$$= \{x | x \in A_1 \wedge x \in A_2 \wedge \cdots \wedge x \in A_n\}$$
$$= \{x | \forall i (1 \le i \le n \to x \in A_i)\}.$$

- 并和交运算还可以推广到无穷多个集合的情况: $\cup_{i=1}^{\infty} A_i$, $\cap_{i=1}^{\infty} A_i$.

集合的基本运算

定义 3.8

设集合A和B，由属于A但不属于B，或由属于B但不属于A的元素组成的集合，称为A与B的对称差集，记作$A \oplus B$.

符号化表示为:

$$\begin{aligned} A \oplus B &= \{x \mid (x \in A \wedge x \notin B) \vee (x \in B \wedge x \notin A)\} \\ &= (A - B) \cup (B - A) \\ &= (A \cup B) - (A \cap B) \end{aligned}$$

例 设$A = \{2,3\}$, $B = \{1,5,8\}$, $C = \{3,6\}$,

则$B \oplus C = \{1,3,5,6,8\}$，$A \cup (B \oplus C) = \{1,2,3,5,6,8\}$.

但$A \cup B = \{1,2,3,5,8\}$, $A \cup C = \{2,3,6\}$, $(A \cup B) \oplus (A \cup C) = \{1,5,6,8\}$

所以 $A \cup (B \oplus C) \neq (A \cup B) \oplus (A \cup C)$. 即$\cup$对$\oplus$无分配律.

集合的基本运算

定义 3.9

设E为全集，$A \subseteq E$，A对E的相对补集$E - A$称为A的绝对补集，简记为$\sim A$, 读作飘A.

符号化表示为:

$x \in E$是真命题, 同一律

$$\sim A = E - A = \{x|x \in E \land x \notin A\} = \{x|x \notin A\}$$

- 一些性质:

$$\sim E = \emptyset; \quad \sim\emptyset = E; \quad A - A = \emptyset; \quad A - \emptyset = A; \quad A - E = \emptyset$$

- 若$A \subseteq B$, 则$\sim B \subseteq \sim A$, $A - B = \emptyset$.

集合的基本运算

例　证明补交转换律$A - B = A \cap \sim B$，即将差运算转化为交运算和绝对补运算.

证明　对于任意的x

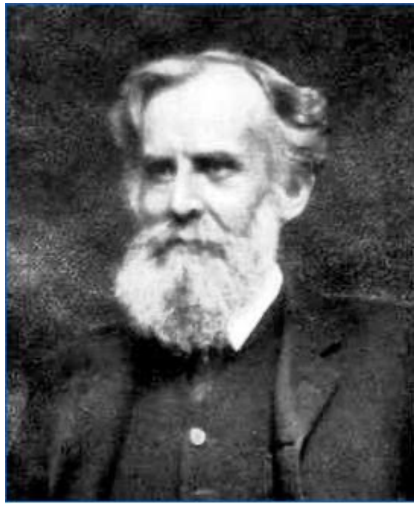
$$
\begin{aligned}
& x \in A - B \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge x \notin B \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \wedge x \in \sim B \\
\Leftrightarrow\ & x \in A \cap \sim B
\end{aligned}
$$

集合的基本运算

- 为了正确进行集合之间的运算，我们需要规定集合运算的优先级，为此将集合运算分成高，低二级:
- 高优先级（一元运算）：绝对补，幂.
  - 同级运算按从右向左的顺序进行.
- 低优先级（二元运算）：并，交，相对补和对称差；
  - 同级运算按从左向右的顺序进行.
  - 集合运算中的并和交虽然类似于命题逻辑中的析取和合取，然而它们是平级的.
- 为保证运算次序的清晰性，可适当地添加括号.

文氏图

- 文氏图可以用来描述集合间的关系及其运算.
- 全集E用矩形表示, 子集用圆或其他任何封闭曲线围成的区域表示, 阴影区域表示运算结果的集合.
- 文氏图表示法的优点是直观和形象，富有启发性，帮助我们理解各种概念和定理，所以文氏图可作为思考的出发点.
- 但文氏图绝不能用作推理的依据，因为直观是不可靠的，只有逻辑推理才是可靠的．另外，当集合的数目较多时, 文氏图将变得很复杂.

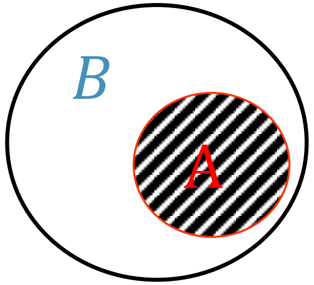


约翰 · 维恩
(1834-1923)
英国数学家、逻辑学家、哲学家

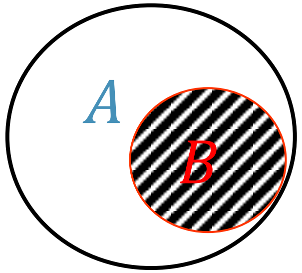
图片来源: https://zh.wikipedia.org/wiki/%E7%B4%84%E7%BF%B0%C2%B7%E7%B6%AD%E6%81%A9

文氏图

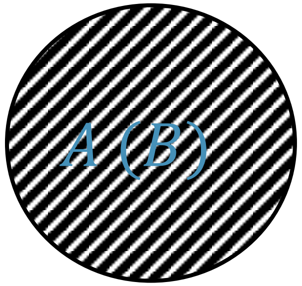
$A \cap B$可用下图阴影部分表示



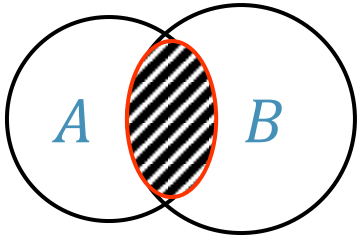
(1) 若$A \subset B$
则$A \cap B = A$



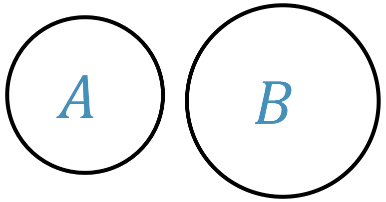
(2) 若$B \subset A$
则 $A \cap B = B$



(3) 若$A = B$则
$A \cap B = A = B$



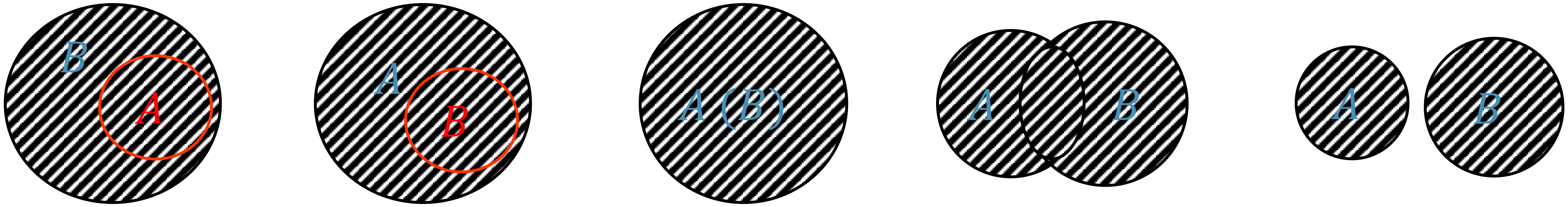
(4) A与B相交
$A \cap B \subset A$
$A \cap B \subset B$



(5) A与B分离
$A \cap B = \emptyset$

文氏图

$A \cup B$可用下图阴影部分表示



(1) 若$A \subset B$
则$A \cup B = B$

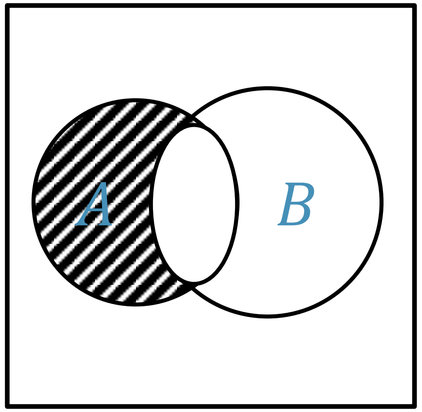
(2) 若$B \subset A$
则 $A \cup B = B$

(3) 若$A = B$则
$A \cup B = A = B$

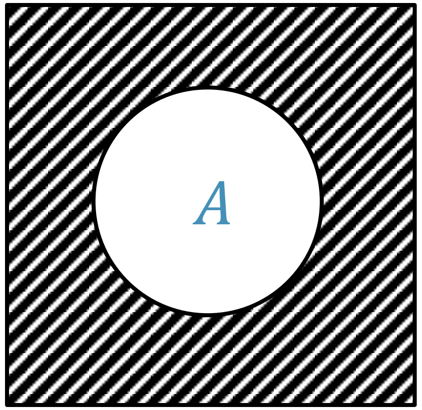
(4) A与B相交
$A \cup B$

(5) A与B分离
$A \cup B$

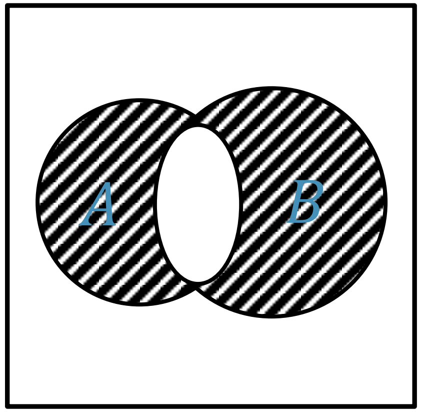
文氏图



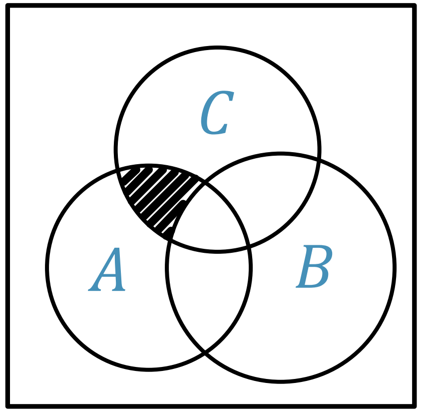
$A - B$



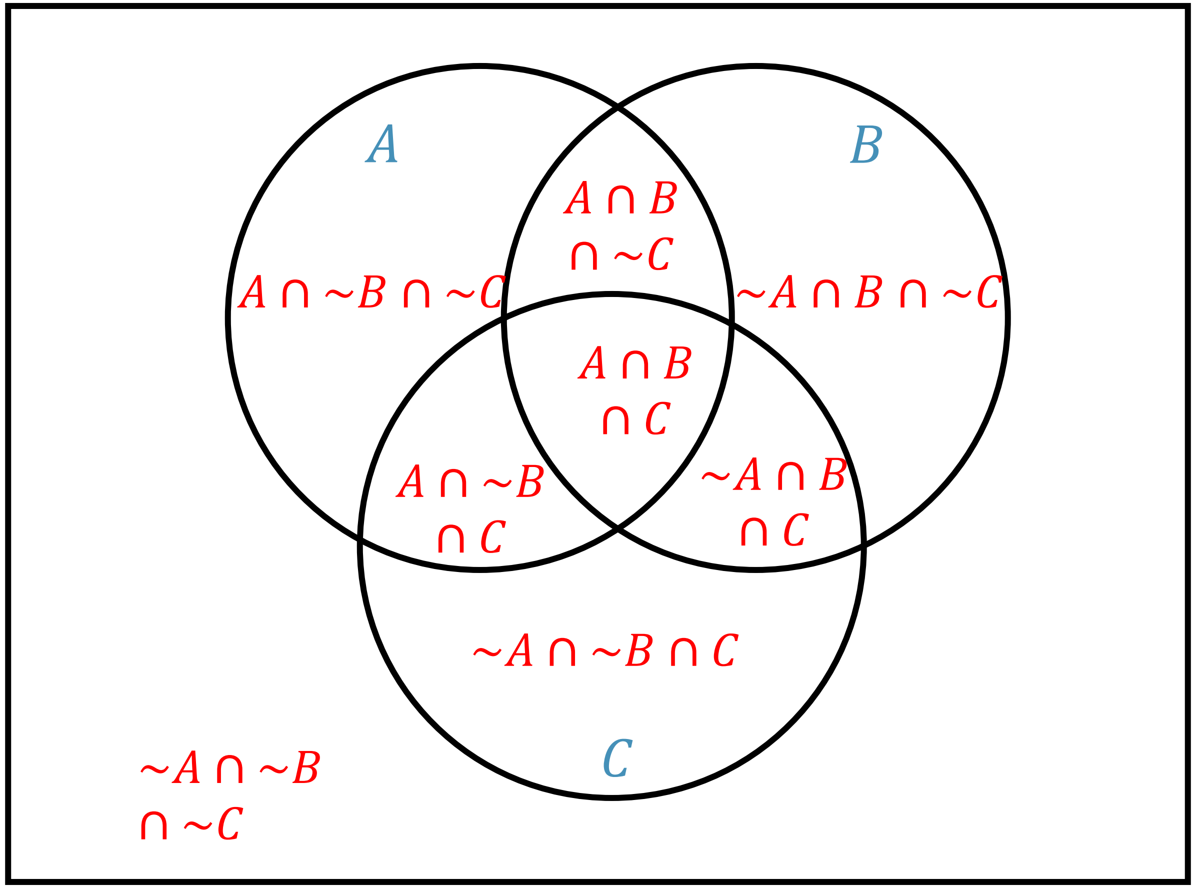
$\sim A$



$A \oplus B$



$(A \cap C) - B$


A
B
$A \cap B \cap \sim C$
$A \cap \sim B \cap \sim C$
$\sim A \cap B \cap \sim C$
$A \cap B \cap C$
$A \cap \sim B \cap C$
$\sim A \cap B \cap C$
$\sim A \cap \sim B \cap C$
C
$\sim A \cap \sim B \cap \sim C$

课堂练习

设$B = \{2,3,\{2,3\},\emptyset\}$, 求下列集合:

(1) $B - \{2,3\}$

(2) $\{\{2,3\}\} - B$

(3) $B - \emptyset$

(4) $B - \{\emptyset\}$

课堂练习

设$B=\{2,3,\{2,3\},\emptyset\}$, 求下列集合:

(1) 解 $B-\{2,3\}=\{\{2,3\},\emptyset\}$

(2) 解 $\{\{2,3\}\}-B=\emptyset$

(3) 解 $B-\emptyset=B$

(4) 解 $B-\{\emptyset\}=\{2,3,\{2,3\}\}$

3.3 集合恒等式

集合恒等式

- 大多数代数运算都遵从一定的定律, 集合运算也不例外.
- 下面以恒等式的形式给出集合运算的主要算律 (全文背诵) . 其中E代表全集, A, B, C代表任意集合.

(1) 幂等律

$$A \cup A = A \quad (3.1)$$
$$A \cap A = A \quad (3.2)$$

(2) 结合律

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C \quad (3.3)$$
$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C \quad (3.4)$$
$$A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C \quad (3.30)$$

(3) 交换律

$$A \cup B = B \cup A \quad (3.5)$$
$$A \cap B = B \cap A \quad (3.6)$$
$$A \oplus B = B \oplus A \quad (3.29)$$

(4) 分配律

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C) \quad (3.7)$$
$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C) \quad (3.8)$$
$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$
$$A \cup (B - C) \supseteq (A \cup B) - (A \cup C)$$

(5) 同一律

$$A \cup \emptyset = A \quad (3.9)$$
$$A \cap E = A \quad (3.10)$$
$$A - \emptyset = A$$
$$A \oplus \emptyset = A \quad (3.31)$$

(6) 零律

$$A \cup E = E \quad (3.11)$$
$$A \cap \emptyset = \emptyset \quad (3.12)$$
$$A - A = \emptyset$$
$$A \oplus A = \emptyset \quad (3.32)$$

集合恒等式

(7) 排中律 $A \cup \sim A = E$ (3.13)

(8) 矛盾律 $A \cap \sim A = \emptyset$ (3.14)

(9) 吸收律 $A \cup (A \cap B) = A$ (3.15)

$A \cap (A \cup B) = A$ (3.16)

(10) 德.摩根律

$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$ (3.17)

$A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$ (3.18)

$\sim (B \cup C) = \sim B \cap \sim C$ (3.19)

$\sim (B \cap C) = \sim B \cup \sim C$ (3.20)

(11) 否定律 $\sim \emptyset = E$ (3.21)

$\sim E = \emptyset$ (3.22)

(12) 双重否定律 $\sim(\sim A) = A$ (3.23)

(13) 补交转换律 $A - B = A \cap \sim B$ (3.27)

(14) 对称差

$$A \oplus B = (A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \sim B) \cup (B \cap \sim A)$$

(15) 其他

$A \cap B \subseteq A, A \cap B \subseteq B$ (3.24)

$A \subseteq A \cup B, B \subseteq A \cup B$ (3.25)

$A - B \subseteq A$ (3.26)

$A \subseteq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \cap B = A \Leftrightarrow A - B = \emptyset$ (3.28)

$A \oplus B = A \oplus C \Rightarrow B = C$ (3.33)

此处并不是右推左不成立, 而是左推右只有对称差运算成立, 交, 并, 差运算均不成立. 然而右推左是显然的, 对任意运算都成立.

集合证明方法

- 集合恒等式证明的常用方法有基本定义法，公式法和集合成员表 (真值表) 法:

一, 基本定义法

- 根据集合相等的充要条件是等式两边互为子集或由定义进行等价推理.
- 在求证过程中，前提以及各集合运算的定义给出了各个步骤的依据.
- 这种证明方法较为繁琐.

基本定义法

例3.2 证明德·摩根律 (式3.17) , 即

$$A-(B\cup C) = (A-B)\cap(A-C)$$

证明 对于任意x,

$$\begin{aligned}
& x\in A-(B\cup C)\\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge x\notin B\cup C\\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge\neg(x\in B\cup C)\\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge\neg(x\in B\vee x\in C)\\
\Leftrightarrow\ & x\in A\wedge(x\notin B\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow\ & (x\in A\wedge x\notin B)\wedge(x\in A\wedge x\notin C)\\
\Leftrightarrow\ & (x\in A-B)\wedge(x\in A-C)\\
\Leftrightarrow\ & x\in(A-B)\cap(A-C)
\end{aligned}$$

基本定义法

- 集合的交, 并, 相对补, 绝对补和对称差, 这五种运算在其幂集中是封闭的, 即运算结果的新集合仍是幂集中的元素.
- 幂集运算性质:

(1) $A \subseteq B$当且仅当$P(A) \subseteq P(B)$

(2) $P(A) \cap P(B) = P(A \cap B)$

(3) $P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

(4) $P(\sim A) \neq \sim\big(P(A)\big)$

(5) $P(A - B) \subseteq \big(P(A) - P(B)\big) \cup \{\emptyset\}$

基本定义法

(1) $A \subseteq B$当且仅当$P(A) \subseteq P(B)$.

解 首先证明必要性. 前提: $\forall x(x \in A \to x \in B)$. 结论: $\forall x\big(x \in P(A) \to x \in P(B)\big)$.

证明: 首先通过附加前提规则可轻易证明: $p \to q \Rightarrow (r \to p) \to (r \to q)$

(1) $\forall x(x \in A \to x \in B)$	前提引入
(2) $y \in A \to y \in B$	(1)UI
(3) $(y \in C \to y \in A) \to (y \in C \to y \in B)$	(2)上述证明
(4) $\forall x\big((x \in C \to x \in A) \to (x \in C \to x \in B)\big)$	(3)UG
(5) $\forall x(x \in C \to x \in A) \to \forall x(x \in C \to x \in B)$	(4)量词分配蕴涵律
(6) $\forall D\big(\forall x(x \in D \to x \in A) \to \forall x(x \in D \to x \in B)\big)$	(5)UG
(7) $\forall D(D \subseteq A \to D \subseteq B)$	(6)子集定义
(8) $\forall D\big(D \in P(A) \to D \in P(B)\big)$	(7)幂集定义
(9) $\forall x\big(x \in P(A) \to x \in P(B)\big)$	(8)换名规则

充分性该如何证明呢?

基本定义法

(2) $P(A\cap B)=P(A)\cap P(B)$

证明 对于任意集合C,

$$
\begin{aligned}
& C\in P(A\cap B) && \\
\Leftrightarrow\ & C\subseteq A\cap B && \text{幂集定义}\\
\Leftrightarrow\ & \forall x(x\in C\to x\in A\cap B) && \text{子集定义}\\
\Leftrightarrow\ & \forall x\big(x\in C\to(x\in A\wedge x\in B)\big) && \text{交集定义}\\
\Leftrightarrow\ & \forall x\big(x\notin C\vee(x\in A\wedge x\in B)\big) && \text{蕴涵等值式}\\
\Leftrightarrow\ & \forall x\big((x\notin C\vee x\in A)\wedge(x\notin C\vee x\in B)\big) && \text{分配律}\\
\Leftrightarrow\ & \forall x\big((x\in C\to x\in A)\wedge(x\in C\to x\in B)\big) && \text{蕴涵等值式}\\
\Leftrightarrow\ & \forall x(x\in C\to x\in A)\wedge\forall x(x\in C\to x\in B) && \text{量词分配等值式}\\
\Leftrightarrow\ & C\subseteq A\wedge C\subseteq B && \text{子集定义}\\
\Leftrightarrow\ & C\in P(A)\wedge C\in P(B) && \text{幂集定义}\\
\Leftrightarrow\ & C\in P(A)\cap P(B) && \text{交集定义}
\end{aligned}
$$

基本定义法

(4) $P(\sim A) \neq \sim(P(A))$

证明 $\emptyset \in P(\sim A)$, 但 $\emptyset \notin \sim(P(A))$,

所以 $P(\sim A) \neq \sim(P(A))$.

课堂练习

用基本定义法与构造证明法证明$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

课堂练习

用基本定义法与构造证明法证明$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$

解 前提: $C \in P(A) \cup P(B)$. 结论: $C \in P(A \cup B)$.

证明:

(1) $C \in P(A) \cup P(B)$	前提引入
(2) $C \in P(A) \vee C \in P(B)$	(1)并集定义
(3) $C \subseteq A \vee C \subseteq B$	(2)幂集定义
(4) $\forall x(x \in C \rightarrow x \in A) \vee \forall x(x \in C \rightarrow x \in B)$	(3)子集定义
(5) $\forall x\big((x \in C \rightarrow x \in A) \vee (x \in C \rightarrow x \in B)\big)$	(4)量词分配蕴涵律
(6) $\forall x\big(x \in C \rightarrow (x \in A \vee x \in B)\big)$	(5)蕴涵等值式x2
(7) $\forall x\big(x \in C \rightarrow (x \in A \cup B)\big)$	(6)并集定义
(8) $C \subseteq A \cup B$	(7)子集定义
(9) $C \in P(A \cup B)$	(8)幂集定义

所以$P(A) \cup P(B) \subseteq P(A \cup B)$.

公式法

二, 公式法: 利用已证明过的集合恒等式可方便去证明另外的恒等式.

例 证明$(A-B)-C=A-(B\cup C)=(A-C)-B=(A-C)-(B-C)$.

证明 $(A-B)-C=(A\cap\sim B)-C=A\cap\sim B\cap\sim C$

- $A\cap\sim B\cap\sim C=A\cap\sim(B\cup C)=A-(B\cup C)$
- $A\cap\sim B\cap\sim C=(A\cap\sim C)\cap\sim B=(A-C)-B$
- $A\cap\sim B\cap\sim C=(A\cap\sim C\cap\sim B)\cup(A\cap\sim C\cap C)$

$$=(A\cap\sim C)\cap(\sim B\cup C)=(A\cap\sim C)\cap\sim(B\cap\sim C)$$

$$=(A-C)-(B-C)$$

公式法

例 3.2 使用公式法证明德 · 摩根律 (式3.17) , 即

$$A - (B \cup C) = (A - B) \cap (A - C)$$

证明

$$
\begin{aligned}
& A - (B \cup C) & \\
&= A \cap \sim(B \cup C) & \text{(补交转换律)} \\
&= A \cap (\sim B \cap \sim C) & \text{(德 · 摩根律)} \\
&= (A \cap \sim B) \cap (A \cap \sim C) & \text{(幂等律\&结合律)} \\
&= (A - B) \cap (A - C) & \text{(补交转换律)}
\end{aligned}
$$

公式法

例　证明交运算和对称差运算的分配律, 即

$$A \cap (B \oplus C) = (A \cap B) \oplus (A \cap C)$$

证明

$$
\begin{aligned}
& (A \cap B) \oplus (A \cap C) \\
&= \big((A \cap B) - (A \cap C)\big) \cup \big((A \cap C) - (A \cap B)\big) && \text{(对称差定义)} \\
&= \big(A \cap (B - C)\big) \cup \big(A \cap (C - B)\big) && \text{(分配律)} \\
&= A \cap \big((B - C) \cup (C - B)\big) && \text{(分配律)} \\
&= A \cap (B \oplus C) && \text{(对称差定义)}
\end{aligned}
$$

- 但$A \cup (B \oplus C) \neq (A \cup B) \oplus (A \cup C)$

  令$A = \{1\}, B = \{2\}, C = \{2\}$, 则$(A \cup B) \oplus (A \cup C) = \emptyset$, $A \cup (B \oplus C) = A \neq \emptyset$

公式法

例 设A, B, C是任意集合，用集合运算定律证明

$$(A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) = (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)$$

证明

$$
\begin{aligned}
& (A \cup B) \cap (B \cup C) \cap (C \cup A) \\
&= (A \cup B) \cap \big((B \cap A) \cup C\big) && \text{(分配律)} \\
&= \big((A \cup B) \cap (B \cap A)\big) \cup \big((A \cup B) \cap C\big) && \text{(分配律)} \\
&= (B \cap A) \cup \big((A \cup B) \cap C\big) && \big((B \cap A) \subseteq (A \cup B)\big) \\
&= (B \cap A) \cup \big((A \cap C) \cup (B \cap C)\big) && \text{(分配律)} \\
&= (A \cap B) \cup (B \cap C) \cup (C \cap A)
\end{aligned}
$$

课堂练习

通过公式法证明交运算和差运算的分配律, 即

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

课堂练习

证明交运算和差运算的分配律, 即

$$A \cap (B - C) = (A \cap B) - (A \cap C)$$

证明

$$
\begin{aligned}
& (A \cap B) - (A \cap C) & \\
= \ & (A \cap B) \cap \sim(A \cap C) & \text{(补交转换律)} \\
= \ & (A \cap B) \ \cap (\sim A \cup \sim C) & \text{(德·摩根律)} \\
= \ & (A \cap B \cap \sim A) \cup (A \cap B \cap \sim C) & \text{(分配律)} \\
= \ & A \cap B \cap \sim C & \text{(同一律)} \\
= \ & A \cap (B \cap \sim C) & \text{(结合律)} \\
= \ & A \cap (B - C) & \text{(补交转换律)}
\end{aligned}
$$

真值表法

三, 真值表法.

- 为进一步了解集合之间的逻辑关系, 可用表格的方式描述集合的交, 并, 补运算的定义.
- 在表的列中, 0表示元素$x \notin S$, 1表示$x \in S$, 这种表格称为集合成员表(真值表).
- 成员数目不大时, 可以用集合真值表证明集合.

例 集合$A \cap B$, 集合$A \cup B$的真值表

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$
0	0	0	0
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	1	1

真值表法

- 使用真值表法证明恒等式的步骤:

  (1) 列出有限集合S中所有集合$S_1, S_2\ \dots, S_n$所有可能的赋值, 不同的赋值共有2^n个.

  (2) 按照从内到外的顺序写出集合S的各层次.

  (3) 对应每个赋值, 计算集合S的各层次值, 直到最后计算出整个集合S的值.

- 利用集合真值表, 可判断集合的性质及集合间的关系.

  (1) 若集合是全集, 则其真值表列值必全为1, 即所有集合都是它的成员.

  (2) 若集合是空集, 则其真值表列值必全为0, 即没有集合是它的成员.

  (3) 若集合A和B相等, 则它们的真值表对应行的值必相同

  (4) 若集合A是B的子集, 则当A的值为1时, B的对应行的值必为1.

真值表法

例　用集合真值表证明德.摩根律

$$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$$

A	B	$\sim A$	$\sim B$	$A \cap B$	$\sim(A \cap B)$	$\sim A \cup \sim B$
0	0	1	1	0	1	1
0	1	1	0	0	1	1
1	0	0	1	0	1	1
1	1	0	0	1	0	0

因为真值表中集合$\sim(A \cap B)$和$\sim A \cup \sim B$所标记的列完全相同，所以$\sim(A \cap B) = \sim A \cup \sim B$.

课堂练习

用真值表法证明$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

课堂练习

用真值表法证明$(A \cup B) - (A \cap B) = (A - B) \cup (B - A)$

解

A	B	$A \cap B$	$A \cup B$	$A - B$	$B - A$	$(A \cup B) - (A \cap B)$	$(A - B) \cup (B - A)$
0	0	0	0	0	0	0	0
0	1	0	1	0	1	1	1
1	0	0	1	1	0	1	1
1	1	1	1	0	0	0	0

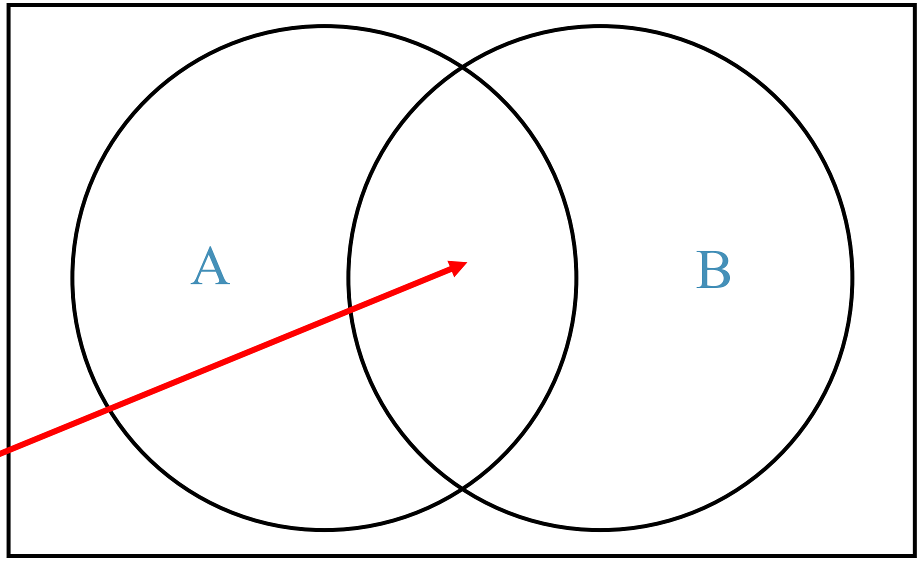
3.4 有穷集合的计数

有穷集合的计数

- 含有有限个元素的集合称作有穷集合 (又称有限集合).
- 计算有穷集合经过运算之后得到的集合的元素数(势)，称为有穷集合的元素计数问题.
- 设A和B是有穷集合, 由集合运算的定义, 下列各式成立:
  - $|A \cup B| \leq |A| + |B|$
  - $|A \cap B| \leq \min(|A|, |B|)$
  - $|A - B| \geq |A| - |B|$
  - $|A \oplus B| = |A| + |B| - 2|A \cap B|$
- 在有穷集合的元素计数问题中, 所谓包含排斥原理 (又称容斥原理) 是指我们计算某类事物的数目时，要排斥那些不应包含在这个计数中的数目，但同时要包容那些被错误排斥了的数目，以此补偿.

包含排斥原理

定理 3.1.1 $|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|.$



交集区域重复计算一次

包含排斥原理

定理3.1.1 $|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

证明 (1) 当$A\cap B=\emptyset$时, 显然$|A\cup B|=|A|+|B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

(2) 当$A\cap B\neq\emptyset$时, 则

$$\begin{aligned}|A|&=|A\cap(B\cup{\sim}B)|=|(A\cap B)\cup(A\cap{\sim}B)| &&\text{分配律}\\ &=|A\cap B|+|A\cap{\sim}B| &&\text{由(1)}, (A\cap B)\cap(A\cap{\sim}B)=\emptyset\end{aligned}$$

同理, $|B|=|A\cap B|+|{\sim}A\cap B|$. 所以可得

$$|A|+|B|=|A\cap{\sim}B|+|{\sim}A\cap B|+|A\cap B|+|A\cap B|$$

同理, 通过分配律, 可得

$$\begin{aligned}A\cup B&=(A\cup B)\cap({\sim}B\cup B)=(A\cap{\sim}B)\cup B=(A\cap{\sim}B)\cup\big(B\cap({\sim}A\cup A)\big)\\ &=(A\cap{\sim}B)\cup({\sim}A\cap B)\cup(A\cap B)\end{aligned}$$

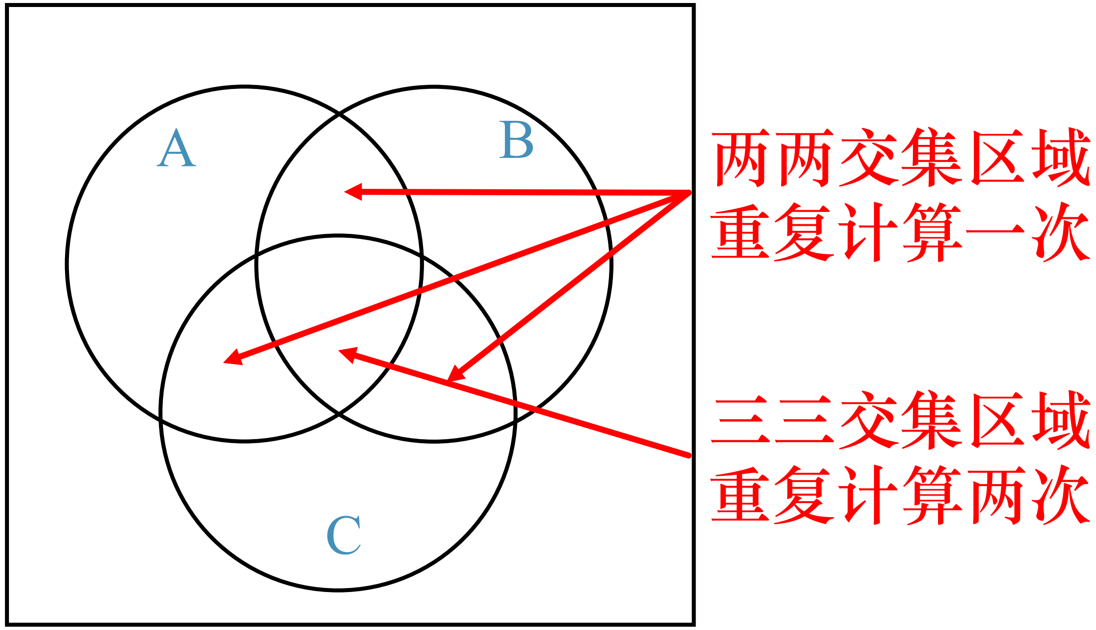
上式中的三项互不相交, 由(1)可得$|A\cup B|=|A\cap{\sim}B|+|{\sim}A\cap B|+|A\cap B|$.

结合以上两式可得$|A\cup B|=|A|+|B|-|A\cap B|$.

包含排斥原理

定理3.1.2

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$



包含排斥原理

定理 3.1.2

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

证明

$|A \cup B \cup C|$

$= |A \cup B| + |C| - |(A \cup B) \cap C|$ 定理3.1.1

$= |A| + |B| - |A \cap B| + |C| - |(A \cap C) \cup (B \cap C)|$ 定理3.1.1&分配律

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - (|A \cap C| + |B \cap C| - |(A \cap C) \cap (B \cap C)|)$ 定理3.1.1

$= |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$

包含排斥原理

定理 3.1 包含排斥原理(容斥原理)

设S为有穷集合, $P_1, P_2, \ldots, P_n$是n种性质, 且A_i是S中具有性质P_i的元素构成的子集, $i = 1, 2, \ldots, n$. 则S中至少具有一条性质的元素数是

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i| - \sum_{1 \le i < j \le n} |A_i \cap A_j| + \sum_{1 \le i < j < k \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k|$$

$$- \sum_{1 \le i < j < k < l \le n} |A_i \cap A_j \cap A_k \cap A_l| + \cdots + (-1)^{n-1} |A_1 \cap A_2 \cap \cdots \cap A_n|$$

- 加多了就扣掉，扣多了再补回来，补多了再扣掉，扣多了再补回来…

包含排斥原理

例 求1到250之间能被2, 3, 5和7之一整除的整数个数.

解 设S_2, S_3, S_5, S_7分别表示1到250之间能被2,3,5,7整除的整数集合. 我们需要计算的是$|S_2 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7|$. $\lfloor x \rfloor$表示小于或等于x的最大整数. 则可计算得出:

$|S_2| = \lfloor 250/2 \rfloor = 125$, $|S_3| = \lfloor 250/3 \rfloor = 83$,

$|S_5| = \lfloor 250/5 \rfloor = 50$, $|S_7| = \lfloor 250/7 \rfloor = 35$,

$|S_2 \cap S_3| = \lfloor 250/(2\times3) \rfloor = 41$, $|S_2 \cap S_5| = \lfloor 250/(2\times5) \rfloor = 25$,

$|S_2 \cap S_7| = \lfloor 250/(2\times7) \rfloor = 17$, $|S_3 \cap S_5| = \lfloor 250/(3\times5) \rfloor = 16$,

$|S_3 \cap S_7| = \lfloor 250/(3\times7) \rfloor = 11$, $|S_5 \cap S_7| = \lfloor 250/(5\times7) \rfloor = 7$,

包含排斥原理

$|S_2 \cap S_3 \cap S_5| = \lfloor 250/(2\times3\times5) \rfloor = 8$, $|S_2 \cap S_3 \cap S_7| = \lfloor 250/(2\times3\times7) \rfloor = 5$,

$|S_2 \cap S_5 \cap S_7| = \lfloor 250/(2\times5\times7) \rfloor = 3$, $|S_3 \cap S_5 \cap S_7| = \lfloor 250/(3\times5\times7) \rfloor = 2$,

$|S_2 \cap S_3 \cap S_5 \cap S_7| = \lfloor 250/(2\times3\times5\times7) \rfloor = 1$,

所以$|S_2 \cup S_3 \cup S_5 \cup S_7| = |S_2| + |S_3| + |S_5| + |S_7|$

$-|S_2 \cap S_3| - |S_2 \cap S_5| - |S_2 \cap S_7| - |S_3 \cap S_5|$

$-|S_3 \cap S_7| - |S_5 \cap S_7| + |S_2 \cap S_3 \cap S_5| + |S_2 \cap S_3 \cap S_7| + |S_2 \cap S_5 \cap S_7|$

$+|S_3 \cap S_5 \cap S_7| - |S_2 \cap S_3 \cap S_5 \cap S_7|$

$= 125 + 83 + 50 + 35 - 41 - 25 - 17 - 16 - 11 - 7 + 8 + 5 + 3 + 2 - 1$

$= 193$

课堂练习

对100名网瘾少年进行调查的结果是：34人沉迷王者荣耀，24人沉迷吃鸡，48人沉迷原神；13人既沉迷王者荣耀又沉迷原神；14人既沉迷王者荣耀又沉迷吃鸡；15人既沉迷吃鸡又沉迷原神；还有25人不沉迷游戏，沉迷抖音. 问同时沉迷这三种游戏的网瘾少年人数是多少？

课堂练习

对100名网瘾少年进行调查的结果是：34人沉迷王者荣耀，24人沉迷吃鸡，48人沉迷原神；13人既沉迷王者荣耀又沉迷原神；14人既沉迷王者荣耀又沉迷吃鸡；15人既沉迷吃鸡又沉迷原神；还有25人不沉迷游戏，沉迷抖音．问同时沉迷这三种游戏的网瘾少年人数是多少?

解 设A为沉迷王者荣耀的网瘾少年集合，B为沉迷吃鸡的网瘾少年集合，C为沉迷原神的网瘾少年集合．由题意知

$$|A| = 34, |B| = 24, |C| = 48, |A \cap B| = 14, |B \cap C| = 13, |C \cap A| = 15,$$

$$|A \cup B \cup C| = 100 - |{\sim}A \cap {\sim}B \cap {\sim}C| = 100 - 25 = 75.$$

由容斥定理知:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |B \cap C| - |C \cap A| + |A \cap B \cap C|$$

$$|A \cap B \cap C| = 75 - (34 + 24 + 48 - 14 - 13 - 15) = 11$$

即同时沉迷这三种游戏的网瘾少年人数是11人.

有穷集合的计数

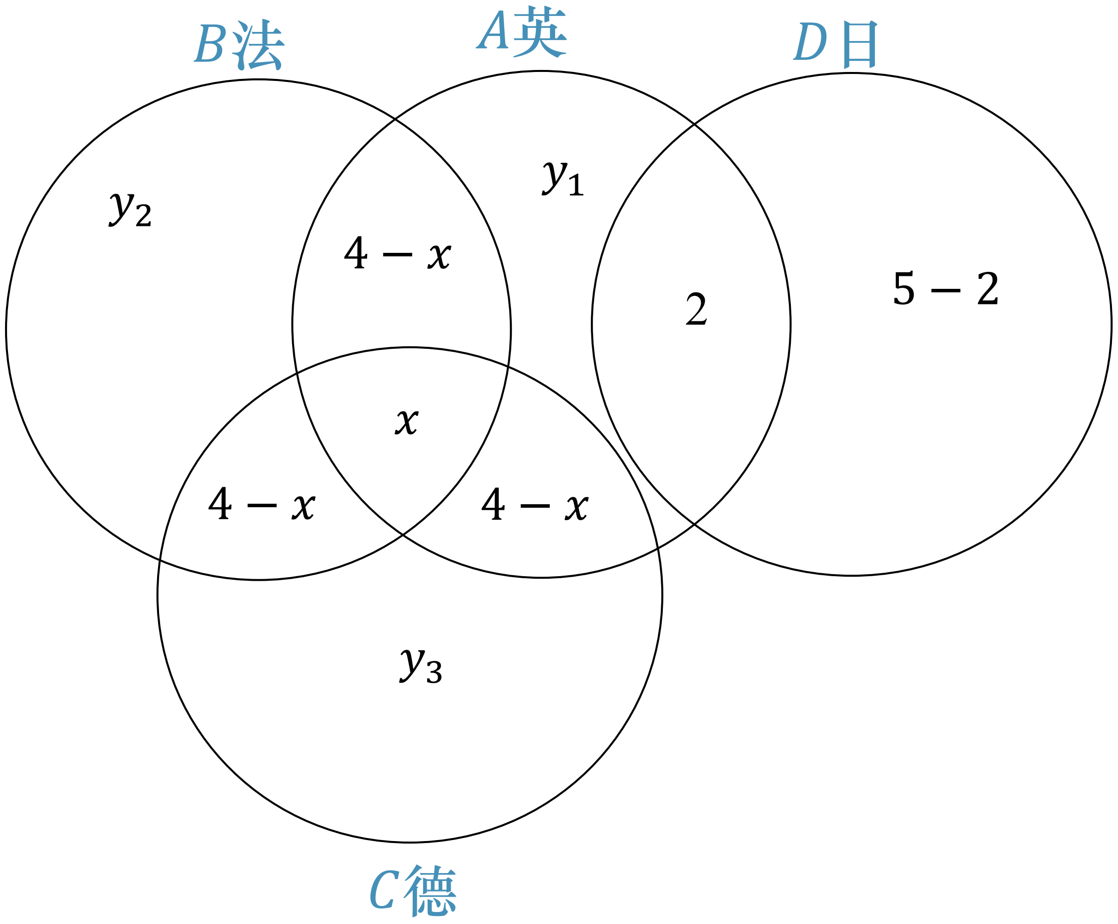
- 当已知条件不能直接应用包含排斥原理时，使用文氏图可以方便地解决有穷集的计数问题.
- 一般地说，每一条性质决定一个集合. 有多少条性质，就有多少个集合.
- 如果没有特殊说明，任何两个集合都画成相交的，然后将已知集合的元素数填入表示该集合的区域内.
- 通常从几个集合的交集填起，根据计算的结果将数字逐步填入所有的空白区域.
- 如果区域的数字是未知的，可以设为变量. 根据题目的条件，列出一次方程组，就可以求解得所需要的结果.

有穷集合的计数

例3.8 对24名会外语的科技人员进行掌握外语情况的调查. 其统计结果如下: 会英, 日, 德和法语的人分别为13, 5, 10和9人. 其中同时会英语和日语的有2人, 会英, 德和法语中任何两种语言的人都是4人. 已知会日语的人既不懂法语也不懂德语, 分别求只会一种语言(英, 德, 法, 日)的人数, 和会三种语言的人数.

解　令A, B, C, D分别表示会英, 法, 德, 日的人集合.

- 设同时会三种语言的有x人.
- 只会英, 法或德语一种语言的分别为y_1, y_2和y_3人.
- 将x和y_1, y_2, y_3填入图中相应的区域, 然后依次填入其他区域的人数. 根据题意画出文氏图以及列出方程组如下:



$$\begin{cases} y_1 + 2(4-x) + x + 2 = 13 \\ y_2 + 2(4-x) + x = 9 \\ y_3 + 2(4-x) + x = 10 \\ y_1 + y_2 + y_3 + 3(4-x) + x = 19 \end{cases}$$

解得 $x = 1, y_1 = 4, y_2 = 2, y_3 = 3.$

课堂练习

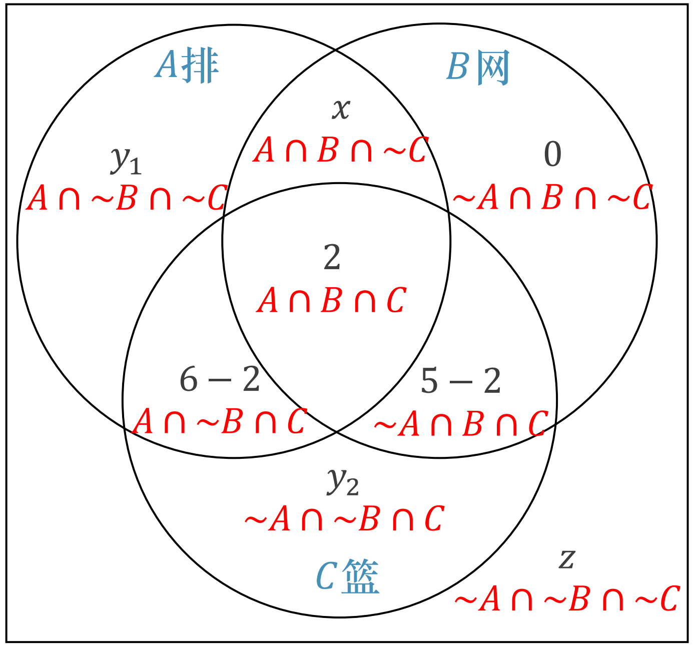
某班有25个学生，其中14人会打篮球，12人会打排球，6人会打篮球和排球，5人会打篮球和网球，有2人会打这三种球. 6个会打网球的人都会打篮球或排球，求不会打球的人.

课堂练习

某班有25个学生, 其中14人会打篮球, 12人会打排球, 6人会打篮球和排球, 5人会打篮球和网球, 有2人会打这三种球. 6个会打网球的人都会打篮球或排球, 求不会打球的人.

解 设会打排球, 网球, 篮球的学生集合分别为A, B, C,

- 设x是会打网球和排球, 但不会打篮球的人数, 则有$x+2+3+0=6$, 解得$x=1$.
- 再设y_1, y_2分别表示只会打排球和只会打篮球的人数, 又有 $y_1+x+2+4=12$和$y_2+4+2+3=14$, 解得$y_1=5, y_2=5$.
- 最后设z为不会打球的人, 由 $y_1+y_2+z+x+2+3+4+0=25$, 解得$z=5$.



作业

p68:

2 (4)

4 (2)

5 (4)

7 (2)

8 (3)

10

12 (2)

13

谢谢

有问题欢迎随时跟我讨论